BINOM TEOREMİ: n pozitif tamsayı olmak üzere, a ve x'in her değeri için;

$$(a+x)^n = \binom{n}{0} a^n + \binom{n}{1} \cdot a^{n-1} \cdot x^1 + \binom{n}{2} \cdot a^{n-2} \cdot x^2 + \dots + \binom{n}{r} \cdot a^{n-r} \cdot x^r + \dots + \binom{n}{n} \cdot x^n = \sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} \cdot a^{n-r} \cdot x^r$$

ifadesine binom açılımı denir. Burada;

$\binom{n}{r}$: Binom katsayıları $\left(\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!\,(n-r)!}\right.$ kom. sayısı)

$\binom{n}{r} \cdot a^{n-r} \cdot x^r$: ifadesine de açılımın genel terimi denir.

$r=0$ alınırsa baştan 1. terim,
$r=1$ " " 2. "
$\vdots$
$r=k$ " " $(k+1)$. terim elde edilir.

Örnek: $2^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \cdots + \binom{n}{n}$ olduğunu gösteriniz.

Çözüm: Binom formülü tüm a ve x değerleri için geçerlidir. $a = x = 1$ alınırsa;

$$(1+1)^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \cdots + \binom{n}{n} = 2^n$$

olur.

Örnek: $(3x^3 - y^4)^{10}$ ifadesinin açılımında x^{12}'yi içeren terimi bulunuz.

Çözüm: Binom açılımının genel ifadesi

$\binom{n}{r} \cdot a^{n-r} \cdot x^r$ kullanılırsa, $\left\{ \begin{array}{l} n = 10 \\ a = 3x^3 \\ x = -y^4 \end{array} \right.$ alınırsa

$$\Rightarrow \binom{10}{r} \cdot (3x^3)^{10-r} \cdot (-y^4)^r$$

$$= \binom{10}{r} \cdot 3^{10-r} \cdot x^{30-3r} \cdot (-y^4)^r \quad (*) \text{ olur.}$$

x^{12}'li terim için

$$30 - 3.r = 12 \Rightarrow 3r = 18$$

$r = 6$ bulunur.

(x^{12}'yi içeren terim baştan 7. terimdir)

$(*)$'da $r = 6$ konursa;

$$\binom{10}{6} \cdot 3^4 \cdot x^{12} \cdot (y)^{24} = 17010 \cdot x^{12} \cdot y^{24}$$

— Olasılık Aksiyomları —

Bir deney yapılsın ve S bu deneyin örnek uzayı olsun. S'deki bir A olayının $p(A)$ olasılığı ile ilgili aşağıdaki aksiyomlar vardır:

A1. $p(A) \geq 0$

A2. $p(S) = 1$

A3. $A_1, A_2, \ldots, A_n$, S uzayında sonlu yada sonsuz sayıda ikişerli ayrık olaylar dizisi olsun. $A_i \cap A_j = \emptyset$, $i \neq j$. Bu durumda;

Gündüz 26.10.09

$$p(A_1 \cup A_2 \cup \ldots) = p(A_1) + p(A_2) + \ldots$$

olur.

Teorem: (Koşullu Olasılık için Çarpma Teoremi)

S'de $A_1, A_2, \ldots, A_n$ olayları verilmiş olsun. Bu olaylar için

$$p(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n) = p(A_1) \cdot p(A_2/A_1) \cdot p(A_3/A_1 \cap A_2) \cdots p(A_n/A_1 \cap \ldots \cap A_{n-1}) \cdots \quad (3)$$

Örnek: 52 lik bir desteden yerine koymaksızın 3 kart çekiliyor. Üç kartın da as olması olasılığı nedir?

Çözüm: Üç olay tanımlayalım,

A_1: Çekilen ilk kart astır.

A_2: " ikinci " "

A_3: " üçüncü " "

$$p(A_1) = \frac{4}{52}, \quad p(A_2/A_1) = \frac{3}{51} \text{ ve } p(A_3/A_1 \cap A_2) = \frac{2}{50}$$

olasılıkları yazılır. (3) formülüne göre $A_1 \cap A_2 \cap A_3$ olayının olasılığı, şartlı olasılıkların çarpımına eşit olacaktır.

$$\Rightarrow p(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = p(A_1) \cdot p(A_2 / A_1) \cdot p(A_3 / A_1 \cap A_2)$$
$$= \frac{4}{52} \cdot \frac{3}{51} \cdot \frac{2}{50} = \frac{24}{132.600} = \frac{1}{5525}$$

Örnek: 4 müşteri bir lokantaya gittiklerinde şapkalarını vestiyere asıyorlar. Ayrılırken şapkalar kendilerine rasgele veriliyor. 4 kişinin de kendi şapkası yerine başkasının şapkasını almış olması olasılığı nedir?

Çözüm: S örnek uzayında A_1, A_2, A_3, A_4 olaylarının en az birinin gerçekleşmesi olasılığı,

$$p(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4) = \sum_{i=1}^{4} p(A_i) - \sum_{i}^{4} \sum_{j=1}^{4} p(A_i \cap A_j)$$
$$+ \sum_{i}^{4} \sum_{j}^{4} \sum_{k}^{4} p(A_i \cap A_j \cap A_k) - p(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4) \quad \ldots (*)$$

formülü ile hesaplanır. Burada

$$p(A_1) = p(A_2) = p(A_3) = p(A_4) = \frac{1}{4}$$
$$p(A_i \cap A_j) = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3},$$
$$p(A_i \cap A_j \cap A_k) = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}$$
$$p(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4) = \frac{1}{4!} \quad \text{dir.}$$

O halde, (*)'dan

$$p(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4) = 4 \cdot \frac{1}{4} - \binom{4}{2} \cdot \frac{1}{4.3} + \binom{4}{3} \cdot \frac{1}{4.3.2} - \binom{4}{4} \frac{1}{4!}$$
$$= 1 - \frac{4!}{2!.2!.4.3} + \frac{4!}{1!.3!.4.3.2} - 1 \cdot \frac{1}{4!}$$
$$= 1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} - \frac{1}{4!} = \frac{15}{24}$$

İstenen olasılık; (4 müşterinin farklı şapka)

$$1 - p(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4) = p(\overline{A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4})$$
$$= \cancel{1} - \cancel{1} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} \quad \text{bulunur.}$$
$$= \frac{9}{24}$$